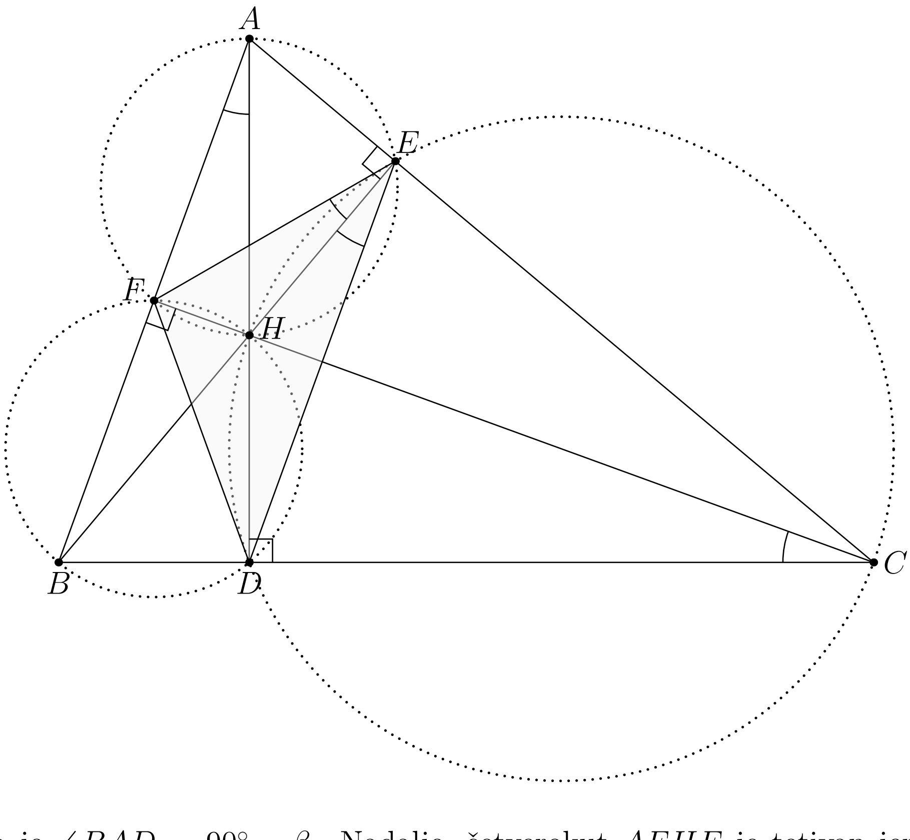
ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Rješenja prvog kolokvija - 25. travnja 2025.

Zadatak 1. Odredite sve trokute koji su slični svojim nožišnim trokutima.
Napomena. Nožišni trokut danog trokuta je trokut čiji su vrhovi nožišta visina tog trokuta.

Rješenje. Neka je ABC trokut, neka su D, E, F redom nožišta visina iz A, B, C, te neka je H ortocentar trokuta.

Pretpostavimo prvo da je trokut šiljastokutan. Cilj je izračunati kutove trokuta DEF u ovisnosti o kutevima α, β, γ početnog trokuta.



Vidimo da je $\angle BAD = 90^\circ - \beta$. Nadalje, četverokut $AFHE$ je tetivan jer je $\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$. Zbog obodnih kuteva nad tetivom FH u kružnici opisanoj četverokutu $AFHE$, slijedi $\angle FEH = 90^\circ - \beta$.

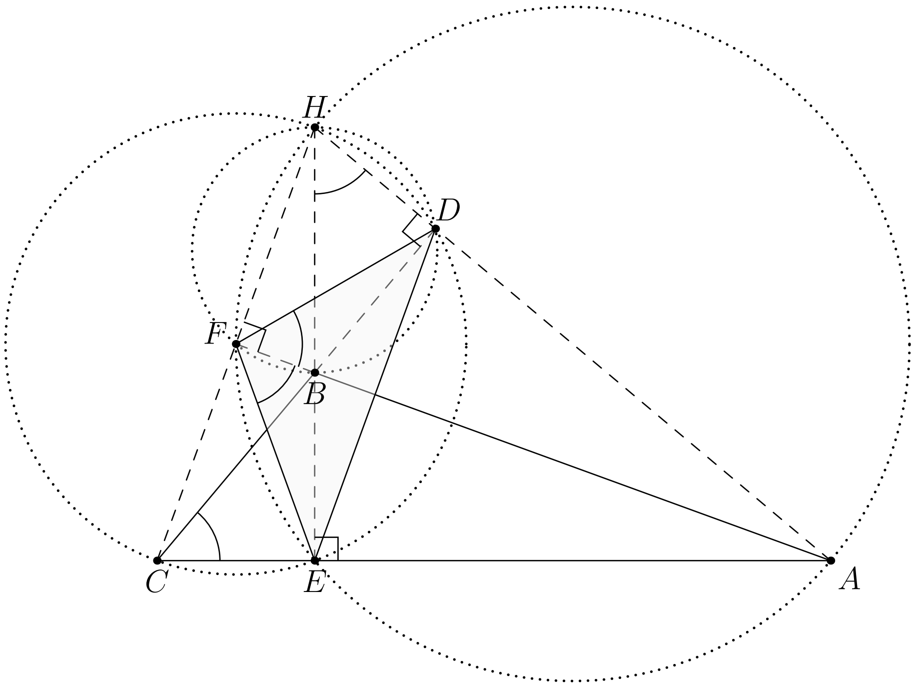
Potpuno analogno bismo dokazali $\angle HED = 90^\circ - \beta$, pa je $\angle DEF = 180^\circ - 2\beta$. Analogno slijedi $\angle EDF = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle DFE = 180^\circ - 2\gamma$. Dakle, ABC i DEF su slični ako i samo ako su α, β, γ u nekom poretku jednaki $180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma$.

Ako je $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$, $\beta = 180^\circ - 2\beta$, $\gamma = 180^\circ - 2\gamma$, onda je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Ako je $\alpha = 180^\circ - 2\beta$, onda slijedi $\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + \gamma$, odnosno $\beta = \gamma$. Ako je onda $\beta = 180^\circ - 2\beta$, slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Slično bismo provjerili sve ostale slučajeve. U svakom od slučajeva dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, pa su jedini šiljastokutni trokuti koji zadovoljavaju uvjet zadatka upravo jednakostranični.

Međutim, račun kuteva koji smo proveli nažalost je validan samo za šiljastokutne trokute, pa trebamo zasebno razmotriti tupokutne (za pravokutne trokute nožišni trokut ne postoji nego se dobije dvokut).

Pretpostavimo da je tupi kut u vrhu B. Tada koristeći analogne argumente (Talesov poučak) dobivamo da su četverokuti $BDHF$, $CEDH$, $AEFH$ tetivni.



Kut $\angle DFB$ jednak je kutu $\angle DHB$ koji je γ. Analogno je $\angle BFE = \gamma$, pa je $\angle DFE = 2\gamma$. Na isti način možemo izračunati $\angle EDF = 2\alpha$. Preostali kut je onda jednak $2\beta - 180°$.

Sada treba vidjeti kada je α, β, γ u nekom poretku jednako $2\alpha, 2\gamma, 2\beta - 180°$.

Slučaj $\alpha = 2\alpha$ nije moguć.

Ako je $\alpha = 2\gamma$, onda je $\gamma = 2\beta - 180°$ i $\beta = 2\alpha = 4\gamma$. Dobivamo $\gamma = \frac{1}{7} \cdot 180°$, $\alpha = \frac{2}{7} \cdot 180°$, $\beta = \frac{4}{7} \cdot 180°$.

Ako je $\alpha = 2\beta - 180°$, onda je $\gamma = 2\alpha$ i dobivamo analogno rješenje, samo s permutiranim α, β, γ.

Zaključujemo da su trokuti koji su rješenja zadatka svi jednakostranični i svi u kojima je omjer kuteva $1 : 2 : 4$.

$\square$

Zadatak 2. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ jednakokračni pravokutni trokuti s pravim kutom pri vrhu A koji dijele samo jedan zajednički vrh A.

a) Dokažite da su dijagonale četverokuta $BCDE$ međusobno okomite i sukladne (jednake duljine).

b) Dokažite da su polovišta stranica četverokuta $BCDE$ vrhovi kvadrata.

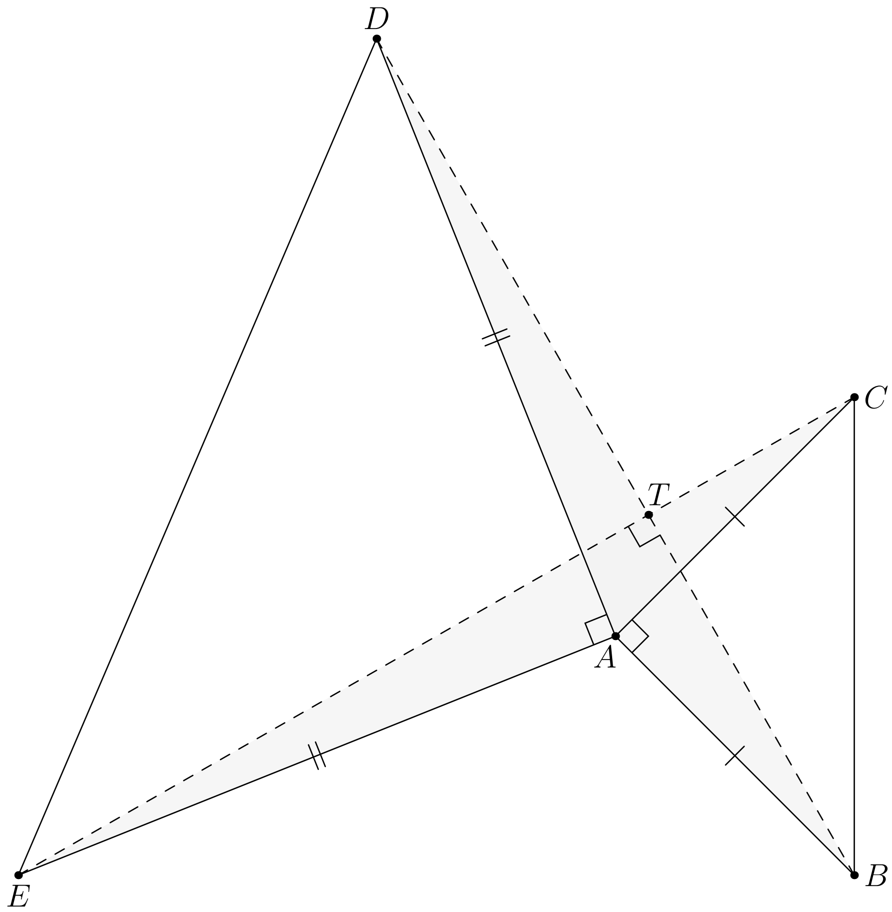
Rješenje.

a) Uočimo da su trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle ACE$ sukladni. Naime, iz uvjeta zadatka imamo da je

$$|AE| = |AD| \text{ i } |AB| = |AC|.$$

Imamo da je $\angle EAC = 90^\circ + \angle DAC = \angle DAB$. Stoga su navedeni trokuti sukladni po SKS poučku. Odatle imamo da je

$$|BD| = |CE|.$$



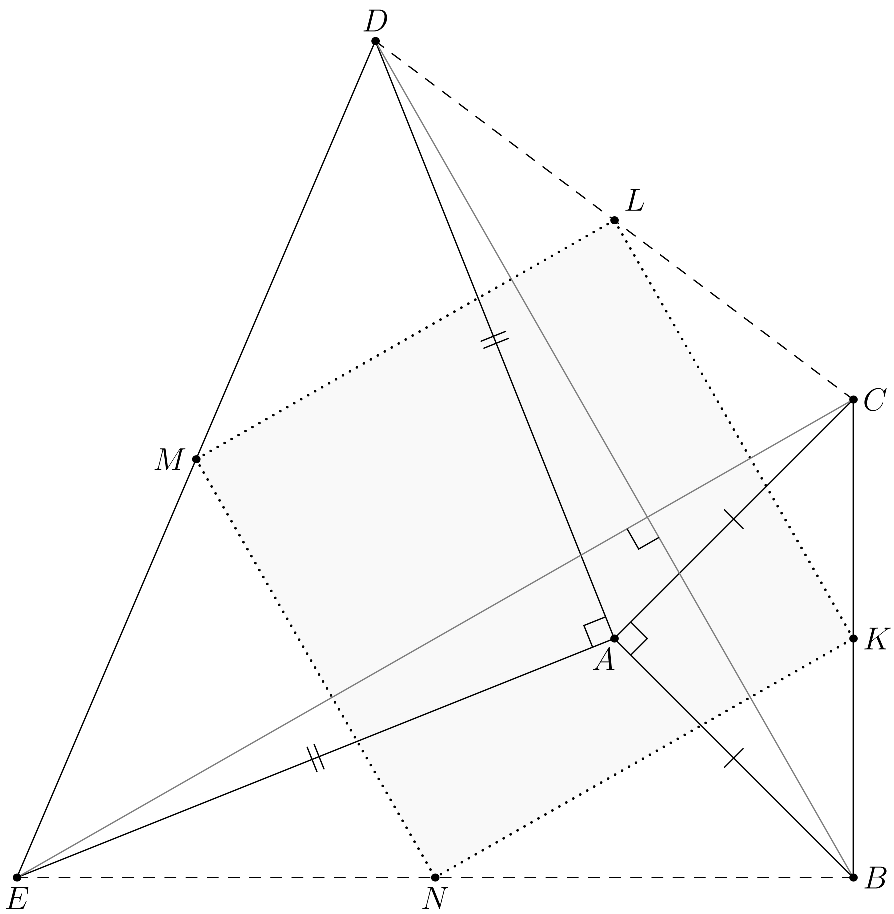
Dodatno, izometrija koja šalje $\triangle ABD$ u $\triangle ACE$ je rotacija za 90° u smjeru suprotno kazaljke na satu, stoga su pripadne dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ okomite.

b) Neka su K, L, M i N redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ i $\overline{EB}$. Tada je $\overline{KL}$ srednjica trokuta $\triangle BCD$ a $\overline{MN}$ srednjica u trokutu $\triangle BED$, posebno vrijedi da je

$$KL \ || \ BD \ || \ MN \quad \text{i} \quad |KL| = \frac{1}{2}|BD| = |MN| \tag{1}$$

Analogno zaključujemo da vrijedi

$$LM \ || \ CE \ || \ NK \quad \text{i} \quad |LM| = \frac{1}{2}|CE| = |NK| \tag{2}$$



Koristeći a) dio zadatka imamo da je $BD \perp CE$ i da je $|BD| = |CE|$, što zajedno sa (1) i (2) povlači da je $KLMN$ kvadrat.

$\square$

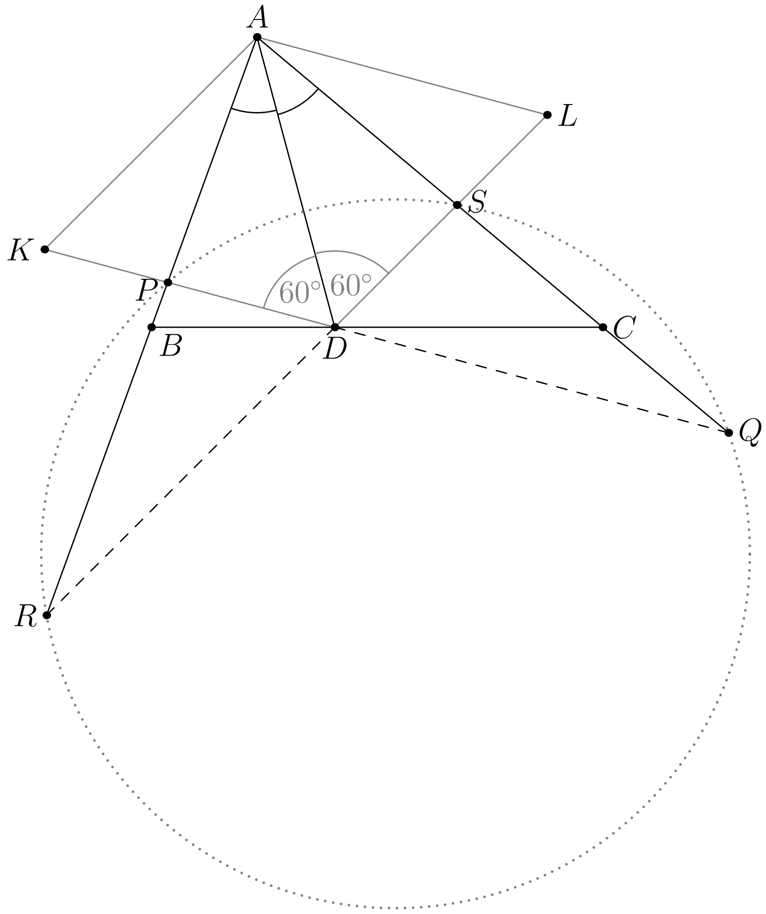
Zadatak 3. Neka je D sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$. Neka su $\triangle AKD$ i $\triangle ADL$ jednakostranični trokuti. Pravac DK siječe pravce AB i AC redom u P i Q, a pravac DL siječe pravce AB i AC redom u R i S. Dokažite da su točke P, Q, R i S na istoj kružnici.

Rješenje. Kako je AD simetrala kuta $\angle BAC$ imamo da je

$$\angle PAD = \angle BAD = \angle DAC = \angle DAS.$$

S druge strane imamo da su $\triangle AKD$ i $\triangle ADL$ jednakostranični, stoga je

$$\angle PDA = 60^\circ = \angle ADS.$$



Konačno, koristeći prethodne dvije jednakosti, imamo da je

$$\angle APD = 180^\circ - \angle PDA - \angle DAP = 180^\circ - \angle ADS - \angle SAD = \angle DSA.$$

Posebno

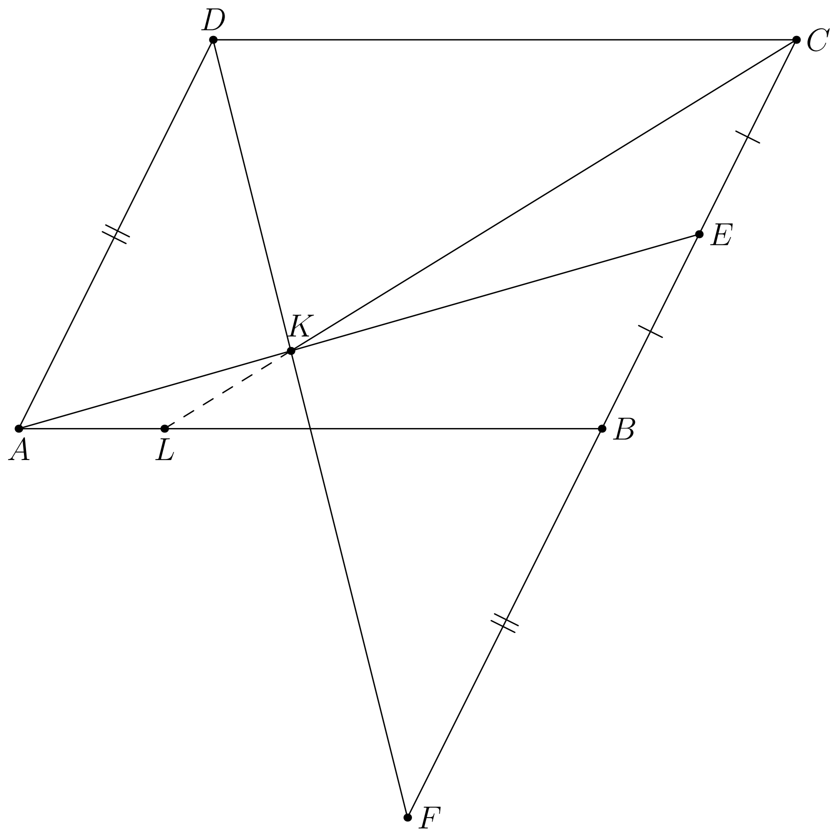
$$\angle RPQ = 180^\circ - \angle APD = 180^\circ - \angle DSA = \angle RSQ.$$

Po obratu teorema o obodnom kutu imamo da su $\angle RPQ$ i $\angle RSQ$ dva jednaka obodna kuta nad tetivom $\overline{RQ}$ u tetivnom četverokutu s vrhovima P, Q, R i S. $\square$

Zadatak 4. Neka je $ABCD$ paralelogram. Točke E i F odabrane su na pravcu BC tako da E bude polovište dužine $\overline{BC}$, a B polovište dužine $\overline{CF}$. Neka je K sjecište pravaca AE i DF. Konačno neka je L sjecište pravaca AB i CK. Odredite omjer $|AL| : |AB|$.

Rješenje. Označimo $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} := \overrightarrow{AD}$. Primijetimo da $\vec{u}, \vec{v}$ čine bazu za V^2, izrazit ćemo ostale vektore u toj bazi. Točka K se nalazi na pravcima AE i DF, pa postoje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{DK} = \mu\overrightarrow{DF}$. Uočimo da je $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, te $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AD} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Nadalje $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \vec{v} + \mu\overrightarrow{DF}$. Dakle

$$\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{u} + \frac{\lambda}{2}\vec{v} = \mu\vec{u} + (1-2\mu)\vec{v} \implies \begin{cases} \lambda = \mu \\ \frac{\lambda}{2} = 1 - 2\mu. \end{cases} \tag{3}$$



U (3) smo koristili da su $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni pa u dva različita zapisa od $\overrightarrow{AK}$, koeficijenti uz njih moraju biti jednaki. Time dobijemo linearni sustav sa dvije nepoznanice i dvije jednadžbe. Rješenja tog sustava su $\lambda = \mu = \frac{2}{5}$. Onda nam $\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{u} + \frac{\lambda}{2}\vec{v}$ zapravo daje

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v}. \tag{4}$$

L leži na AB i KC pa postoje $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da $\overrightarrow{AL} = x\overrightarrow{AB} = x\vec{u}$ i $\overrightarrow{KL} = y\overrightarrow{KC}$. Računamo $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AK} + y\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK} + y(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK})$. Uvrštavanjem (4) i $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, dobijemo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + y(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK}) &= \frac{2+3y}{5}\vec{u} + \frac{1+4y}{5}\vec{v} \\ &= x\vec{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

Slijedi $\frac{2+3y}{5} = x$ i $\frac{1+4y}{5} = 0$, iz čega se lako izračuna $y = \frac{-1}{4}$ i $x = \frac{1}{4}$. To znači $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, iz čega zaključujemo $\boxed{|AL| : |AB| = 1 : 4}$.

□

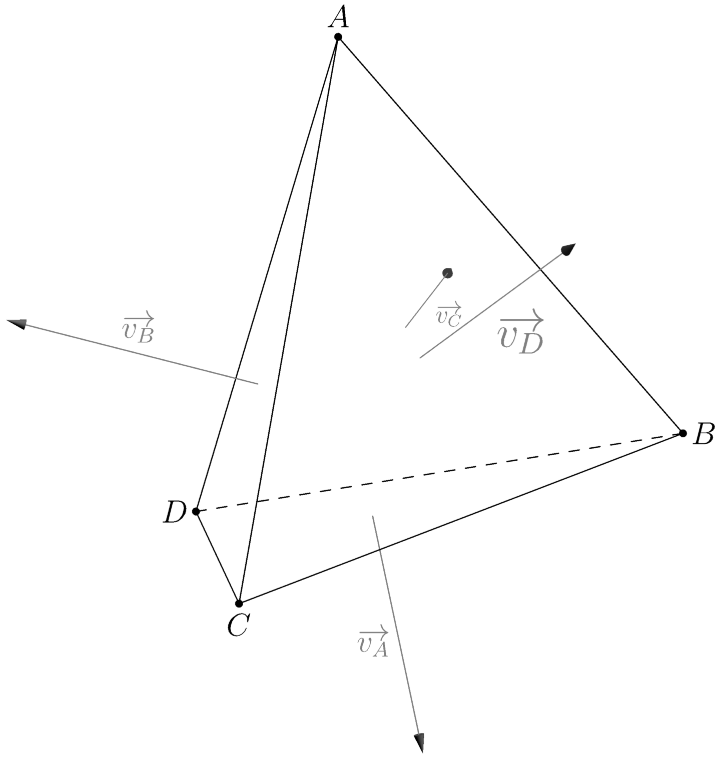
Zadatak 5. Neka su A, B, C i D vrhovi tetraedra. Neka je T_A težište trokuta $\triangle BCD$ i A' točka takva da vrijedi

- točke A i A' se nalaze sa različitih strana ravnine u kojoj leži $\triangle BCD$
- pravac $T_A A'$ je okomit na ravninu u kojoj leži $\triangle BCD$
- duljina $|T_A A'|$ je jednaka površini trokuta $\triangle BCD$.

Definiramo vektor $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{T_A A'}$.
Vektore $\overrightarrow{v_B}, \overrightarrow{v_C}$ i $\overrightarrow{v_D}$ definiramo analogno. Dokažite da je

$$\overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_B} + \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{0}.$$

Rješenje. Neka su vrhovi tetraedra A, B, C i D bez smanjenja općenitosti označeni kao na slici



Kako je površina trokuta $\triangle BCD$ polovica površine paralelograma razapetog s vektorima $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$, vidimo da vektore $\overrightarrow{v_A}, \overrightarrow{v_B}, \overrightarrow{v_C}$ i $\overrightarrow{v_D}$ možemo izraziti preko vektorskog produkta. Ako označimo vektore $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$ redom sa a, b i c, tada imamo

$$\overrightarrow{v_A} = \frac{b \times c}{2}, \qquad \overrightarrow{v_B} = \frac{c \times a}{2}, \quad \text{i} \quad \overrightarrow{v_C} = \frac{a \times b}{2}.$$

S druge strane

$$\overrightarrow{v_D} = \frac{\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (b - c) \times (a - c) = \frac{1}{2} \cdot (b \times a - c \times a - b \times c + \underbrace{c \times c}_{=0}).$$

Zbrajanjem posljednjih četiri jednakosti te koristeći svojstvo antikomutativnosti ($b \times a = -a \times b$) dolazimo do traženog rezultata. $\square$